



**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

*Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas*

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ENERGIA E  
AUTOMAÇÃO ELÉTRICAS**

**ESCOLA POLITÉCNICA DA USP**

**PEA – LABORATÓRIO DE INSTALAÇÕES ELÉTRICAS**

**ELETROMAGNETISMO**

**Código: EL**

# Índice

1	Introdução.....	1
2	Alguns Fenômenos Eletromagnéticos .....	2
2.1	Força em Condutor Imerso em Campo Eletromagnético .....	2
2.2	Tensão Induzida sobre um Condutor .....	3
2.3	Campo Produzido por uma Bobina .....	4
2.4	Indução de Tensão em uma Bobina .....	5
2.5	Conclusão .....	6
3	Modelos Usados em Eletromagnetismo .....	7
3.1	As Grandezas Fundamentais do Eletromagnetismo .....	7
3.2	As Unidades Utilizadas em Magnetismo .....	11
3.3	Circuitos Magnéticos Reais .....	12
3.4	Indutor e Indutância Própria .....	15
3.5	Mútua Indutância .....	16
3.6	Tensão Induzida .....	19
3.6.1	Tensão Induzida por um Fluxo Senoidal no Tempo .....	21
3.6.2	O Transformador - Princípio de Funcionamento .....	24

# I - ELETROMAGNETISMO PARA ENGENHEIROS

## 1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é explicar ao estudante de Engenharia os princípios básicos do Eletromagnetismo. Embora estes princípios sejam em número reduzido, a gama de aplicações que foram projetadas através de seu uso é enorme.

A diversidade de aplicações dos princípios do Eletromagnetismo é igualmente enorme. Basta uma série de exemplos para que isto fique patente: os geradores da usina hidroelétrica de Itaipu, um forno de microondas, a bateria de um carro e um microcomputador com seus circuitos integrados são regidos por um mesmo conjunto de equações que são as bases teóricas do Eletromagnetismo.

Observe que os quatro dispositivos citados acima possuem potências completamente distintas. Além disto, a natureza das tensões e correntes em cada um dos dispositivos citados é completamente distinta (contínua, alternada, pulsada). Mesmo assim, as equações de Maxwell, que sintetizam matematicamente a modelagem dos fenômenos eletromagnéticos, possuem a capacidade de fornecer subsídios ao engenheiro para a análise e síntese de equipamentos elétricos.

Uma forma para a apresentação dos princípios básicos do Eletromagnetismo é o uso direto das equações de Maxwell para a análise destes diversos fenômenos. Esta forma de apresentação, embora mais genérica, acaba por privilegiar o rigor matemático em detrimento, por vezes, do entendimento do fenômeno físico.

Assim, neste trabalho optou-se por analisar o Eletromagnetismo através de uma perspectiva histórica, ou seja, usando o mesmo caminho que pesquisadores como Ampère, Faraday, Lenz, entre outros, trilharam para que os princípios básicos do Eletromagnetismo fossem descobertos. Conhecidos estes princípios, pode-se inclusive partir para uma análise mais profunda e rigorosa dos fenômenos do Eletromagnetismo, através das equações de Maxwell.

Um outro aspecto deste trabalho está ligado ao seguinte fato: no Eletromagnetismo busca-se o cálculo de campos, que são grandezas vetoriais. Os problemas aqui analisados sempre apresentarão algum tipo de simetria, tornando necessário apenas o cálculo do módulo da grandeza vetorial, pois tanto a direção como o sentido são intuitivos. Embora a princípio simplificadora, esta hipótese permite a análise de diversos problemas importantes em Engenharia Elétrica, como por exemplo a distribuição do campo magnético no interior de uma máquina elétrica.

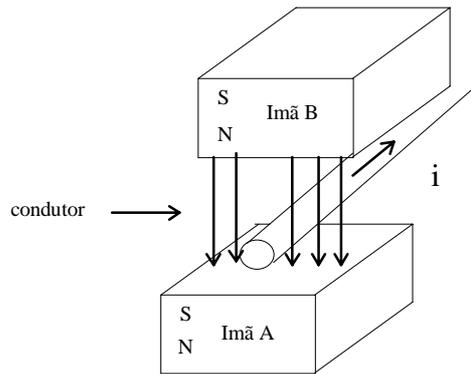
## **2. ALGUNS FENÔMENOS ELETROMAGNÉTICOS**

A sequência natural do desenvolvimento da ciência parte da etapa de observação do fenômeno para o posterior desenvolvimento de modelos matemáticos para a análise dos problemas. Assim, em um primeiro momento será feita uma análise qualitativa dos fenômenos físicos.

### ***2.1 Força em Condutor Imerso em Campo Magnético***

Note a figura 2.1, na qual se têm um condutor por onde circula corrente elétrica contínua e, dois ímãs permanentes que fazem com que o condutor fique imerso em um campo magnético. Nas condições da figura é interessante notar três fenômenos qualitativos importantes:

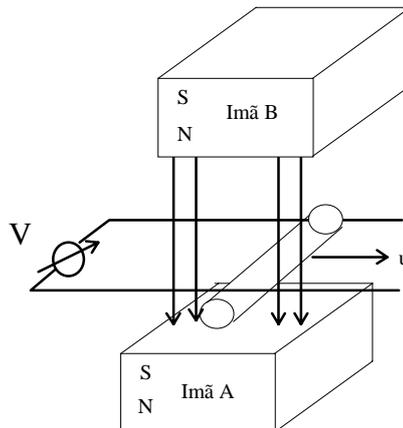
- sobre o condutor desenvolve-se uma força mecânica de origem eletromagnética;
- caso o sentido da corrente seja invertido, esta força mantém seu módulo, mas inverte seu sentido;
- mantendo a corrente do condutor e substituindo os ímãs permanentes por outros *mais fortes*, a força desenvolvida será maior.



**FIGURA 2.1 - Força sobre um Condutor**

## 2.2 Tensão Induzida sobre um Condutor

Um segundo fenômeno que pode ser observado na figura 2.2, na qual se tem um condutor que se desloca com velocidade  $u$ , perpendicular ao campo magnético produzido pelos ímãs A e B.



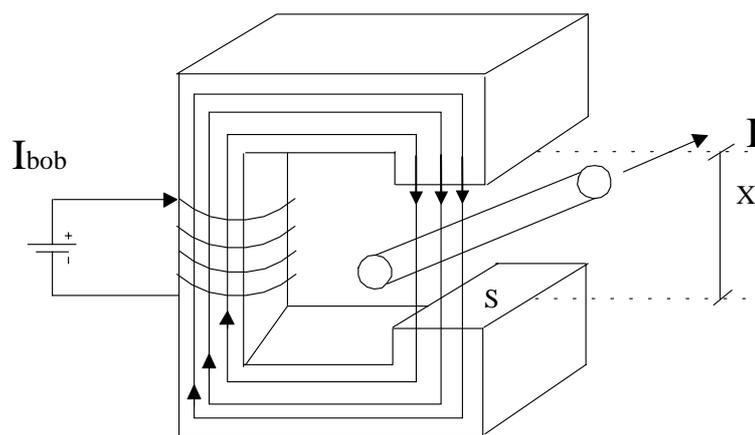
**Figura 2.2 - Tensão Induzida em Um Condutor**

Admitindo que o condutor está apoiado sobre trilhos metálicos e, que estes trilhos são conectados a um voltímetro, nota-se que:

- com um aumento de velocidade do condutor, a tensão induzida ( $V$ ), lida no voltímetro será maior;
- invertendo-se o sentido da velocidade do condutor, a tensão induzida terá sua polaridade invertida;
- mantendo-se a velocidade do condutor e substituindo os ímãs permanentes por um outros *mais fortes*, a tensão induzida será maior.

### 2.3 Campo Produzido por uma Bobina

Substituindo os ímãs permanentes do item referente à Força em um Condutor Imerso em um Campo Magnético (conforme figura 2.1), por um núcleo em ferro em forma de C, que possui uma bobina por onde circula uma corrente como mostra a figura 2.3, nota-se que:



**Figura 2.3 - Um Eletroímã**

- sobre o condutor age uma força mecânica, como foi observado no item acima citado;
- aumentando o valor de  $X$ , o valor da força mecânica diminui;
- aumentando o número de espiras da bobina ou aumentando a corrente que circula na bobina, a força mecânica sobre o condutor aumenta;
- caso a corrente que circula na bobina se inverta, a força mecânica sobre o condutor também inverte o seu sentido;
- caso a peça de ferro fosse retirada, ainda assim haveria força mecânica sobre o condutor, mas o módulo da força teria seu valor extremamente diminuído.

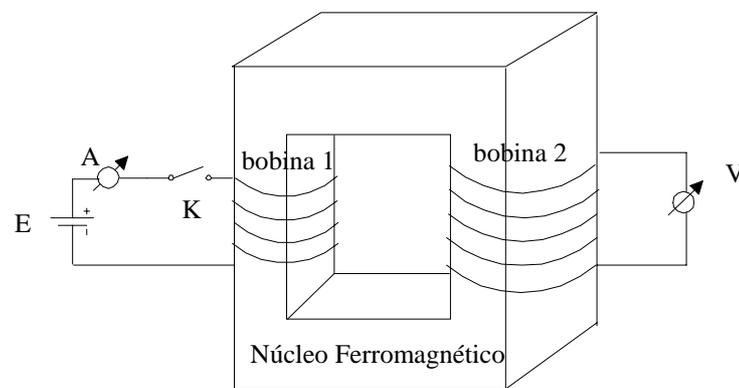
A partir da observação deste fenômeno, pode-se afirmar que a partir de correntes circulando em bobinas é possível a criação de campos magnéticos, da mesma forma que os ímãs permanentes.

As linhas de campo magnético, criadas pela circulação de corrente na bobina, se concentram basicamente no material ferromagnético, conforme mostra a Figura 2.3. Isto mostra que o ferro é mais permeável às linhas de campo do que o ar que envolve o

dispositivo. A concentração de linhas de campo magnético, devida ao núcleo em ferro, faz com que a força mecânica no condutor seja maior nesta condição.

## 2.4 Indução de Tensão em uma Bobina

A figura 2.4 mostra um núcleo ferromagnético onde estão alojadas duas bobinas. A primeira é alimentada através de uma fonte de corrente contínua ligada em série com uma chave (K), fazendo com que seja possível variar o valor da corrente instantânea no enrolamento de alimentação. A segunda bobina tem seus terminais ligados a um voltímetro.



**Figura 2.4 - Indução de Tensão**

Pode-se obter os seguintes fenômenos na montagem da figura 2.4:

- Ao se fechar a chave K, há uma variação de corrente na bobina 1, desde 0 até  $E/R$ , onde R é o valor da resistência ôhmica da bobina 1. Enquanto há um aumento de corrente na bobina 1, na bobina 2 é induzida uma tensão não nula, que pode ser observada pela leitura do voltímetro V.
- Ao se abrir a chave K, na bobina 2 é induzida uma tensão não nula que pode ser observada através da leitura do voltímetro V.
- Aumentado o número de espiras da bobina 2, tanto na abertura como no fechamento da chave K, tem-se uma tensão induzida maior.
- Caso a variação na corrente na bobina 1 seja mais rápida, então a tensão induzida na bobina 2 será maior.

Pode-se então concluir, a partir da análise deste caso, que:

- em todos os casos o campo produzido no núcleo ferromagnético é variável no tempo;
- é possível a indução de tensões em bobinas que não estejam em movimento. Para isto é necessário que estas bobinas estejam imersas em um campo magnético variável no tempo;
- a tensão induzida na bobina 2 é proporcional ao seu número de espiras e à variação temporal da corrente na bobina 1. Esta mesma afirmação pode ser posta na forma : a tensão induzida no enrolamento 2 é proporcional ao seu número de espiras e à variação temporal do campo magnético na bobina 2.

## **2.5 Conclusões**

Neste item pôde-se observar alguns fenômenos eletromagnéticos e, deles retirar algumas conclusões importantes:

- um condutor, por onde circula corrente elétrica, quando imerso em um campo magnético, fica submetido a uma força mecânica;
- um condutor que se move em um campo magnético fica submetido a uma tensão induzida em seus terminais;
- campos magnéticos podem ser produzidos por ímãs permanentes ou por bobinas por onde circula corrente elétrica;
- criando-se um campo magnético variável no tempo, pode-se induzir tensão em uma bobina imersa neste campo;
- em um dispositivo magnético a função do ferro, em geral, é a condução das linhas de campo magnético. A realização do trabalho mecânico (desenvolvimento de força, conforme visto no item sobre “Força em condutor lmerso em Campo Magnético” e em “Campo Produzido por uma Bobina”) é feita no ar.

## **3. OS MODELOS USADOS EM ELETROMAGNETISMO**

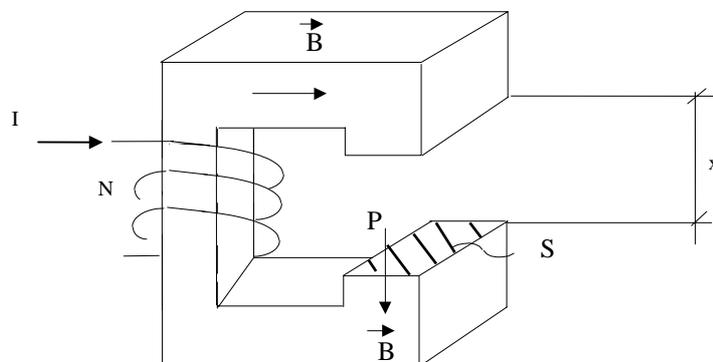
No item anterior analisou-se alguns dos principais fenômenos eletromagnéticos de uma forma meramente qualitativa. Resta a definição de algumas grandezas para a obtenção do equacionamento do fenômeno físico.

Conforme explicitado no item introdutório, escolheu-se neste trabalho o estudo de casos mais simples, mas que ofereçam subsídios conceituais para a compreensão do fenômeno físico em estudo. O uso posterior de ferramentas de cálculo mais apuradas, como as equações de Maxwell, torna mais abrangente a gama de problemas passíveis de serem resolvidos.

### 3.1 As Grandezas Fundamentais do Eletromagnetismo

Dentre as grandezas mais relevantes no estudo de problemas de Eletromagnetismo pode-se citar: o vetor indução magnética, o vetor campo magnético, a permeabilidade magnética, o fluxo magnético, a relutância e a força magnetomotriz.

Para a definição destas grandezas é conveniente a análise de um núcleo em forma de C, conforme mostra a figura 3.1, onde se aloja uma bobina de N espiras percorrida por uma corrente de valor I. Nestas condições cria-se um campo magnético no ferro e no ar, conforme indica a figura 3.1. Este campo magnético será caracterizado através do vetor indução magnética ( $\vec{B}$ ) e pelo vetor campo magnético ( $\vec{H}$ ).



**Figura 3.1 - Um Circuito Magnético**

Conforme visto no capítulo anterior, o campo magnético no entreferro será:

- proporcional ao número de espiras da bobina N;
- proporcional à corrente na bobina I;
- inversamente proporcional ao comprimento do entreferro (x).

Assim, pode-se definir o módulo do vetor indução magnética no ponto P na forma:

$$B = \mu \frac{NI}{x} \quad (3.1)$$

sendo  $\mu$  um fator de proporcionalidade.

Admitindo-se que o valor de  $\vec{B}$  no entreferro seja constante (em direção, sentido e módulo), pode-se determinar seu fluxo  $\phi$  na seção S, na forma:

$$\phi = B.S = \mu \frac{NI}{x} S \quad (3.2)$$

Já o módulo do campo eletromagnético no ponto P é definido por:

$$H = \frac{NI}{x} \quad (3.3)$$

Assim, no ponto P tem-se, comparando-se as duas expressões anteriores:

$$B = \mu H \quad (3.4)$$

A expressão (3.4) mostra que a relação entre o módulo do vetor indução magnética e o módulo do vetor campo magnético é a constante de proporcionalidade  $\mu$ , denominada permeabilidade magnética.

Nas expressões 3.1, 3.2 e 3.3 nota-se que o produto NI é bastante relevante para o cálculo dos vetores indução magnética ( $\vec{B}$ ) e campo magnético ( $\vec{H}$ ). A este produto dá-se o nome de força magnetomotriz ( $\mathfrak{F}$ ) que pode ser calculada na seguinte forma:

$$\mathfrak{F} = NI = \frac{x}{\mu S} \phi = \mathfrak{R} \phi \quad (3.5)$$

A expressão (3.5) mostra que uma força magnetomotriz  $\mathfrak{F} = NI$ , imposta em um circuito magnético faz circular um fluxo  $\phi$ , limitado pelo valor da relutância do circuito magnético ( $\mathfrak{R} = \frac{x}{\mu S}$ ). Isto é análogo à Lei de Ohm para um resistor de comprimento l, seção transversal S, resistividade p e condutividade  $\sigma$ :

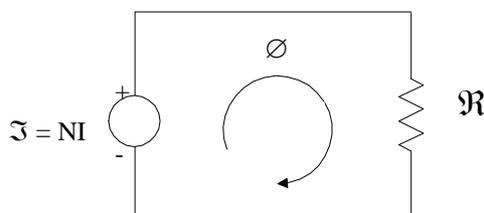
$$V = RI = \frac{\rho \cdot l}{S} I = \frac{l}{\sigma S} I \quad (3.6)$$

A tabela a seguir mostra a analogia entre grandezas magnéticas e elétricas

<b>Grandeza Elétrica</b>	<b>Grandeza Magnética</b>
Tensão elétrica V	Força Magnetomotriz $\mathfrak{F}$
Corrente Elétrica I	Fluxo Magnético $\phi$
Condutividade Elétrica $\sigma$	Permeabilidade Magnética $\mu$
Resistência Elétrica R	Relutância Magnética $\mathfrak{R}$

**Tabela 1 - Analogia entre Grandezas Elétricas e Magnéticas**

A Tabela 1 sugere um circuito elétrico análogo, conforme mostra a figura 3.2:



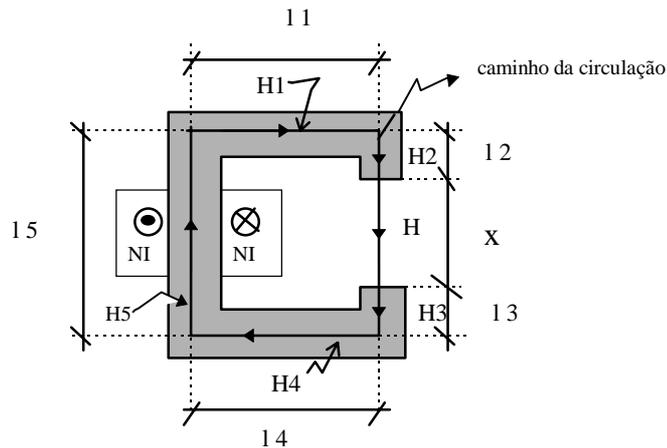
**Figura 3.2 - Circuito Elétrico Análogo**

Do caso analisado pode-se retirar algumas conclusões importantes:

- a relação entre força magnetomotriz e fluxo é a relutância do circuito magnético. Neste caso particular a relutância do circuito magnético ( $\mathfrak{R}$ ) é a relutância do entreferro, pois  $x$  é o comprimento do entreferro;  $S$  é a seção do entreferro e  $\mu$  é a permeabilidade do ar.
- como supostamente não há queda de força-magnetomotriz no núcleo ferromagnético, então sua relutância é nula. Sendo seu comprimento e a sua seção são não nulos, a permeabilidade magnética ( $\mu$ ) é infinita. Isto vem ao encontro da afirmação: o papel principal dos núcleos ferromagnéticos é a “condução” das linhas de campo magnético.
- o fluxo no ferro e no ar é constante. Como a superfície  $S$  é a mesma, então o módulo do vetor indução magnética ( $B$ ) é fixo. Como a permeabilidade magnética  $\mu$  é infinita no ferro, então o vetor campo magnético  $H$  no ferro possui módulo nulo. Usualmente apresenta-se o vetor  $H$  a partir da Lei Circuital de Ampère:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (3.7)$$

Este teorema aponta que a circulação do vetor  $\vec{H}$  ao longo de um caminho fechado é igual à corrente concatenada (somatório da corrente interna a este caminho fechado). Observe a figura 3.3:



**Figura 3.3 - Lei Circuital de Ampère**

No caminho de circulação da figura, L tem-se:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^5 H_i l_i + H \cdot x = NI \quad (3.8)$$

No entanto  $H_i = 0$  pois, por hipótese, ( $\mu = 0$ ) em todos os trechos do caminho L. Assim, a expressão (3.8) é a generalização da equação 3.3, inclusive para o caso da relutância de material ferro-magnético ser assumida não nula, como será analisado no item 3.3.

### 3.2 As Unidades Utilizadas em Magnetismo

As unidades utilizadas em Magnetismo seguem a próxima tabela:

<b>Grandeza</b>	<b>Símbolo</b>	<b>Unidade</b>
Indução Magnética	B	T (Tesla) ou Wb/m <sup>2</sup>
Campo Magnético	H	A/m
Força Magnetomotriz	$\mathfrak{F}$	Aesp (Ampere-espira)

Fluxo Magnético	$\phi$	Wb
Permeabilidade Magnética	$\mu$	H/m
Relutância	$\mathfrak{R}$	Aesp / Wb ou H <sup>-1</sup>

**Tabela 2 - Grandezas Principais do Eletromagnetismo**

### 3.3 Circuitos Magnéticos Reais

No item referente às “Grandezas Fundamentais do Eletromagnetismo”, foram definidas as grandezas principais associadas a um fenômeno magnético. Para isto analisou-se um caso onde no núcleo ferromagnético não havia queda de força magnetomotriz, dado que a permeabilidade magnética do núcleo era infinita.

Em circuitos magnéticos reais, a permeabilidade do núcleo ferromagnético é elevada, porém não infinita, fazendo com que exista uma relutância não nula do circuito magnético situado no ferro.

Retomando a Figura 3.3 da Lei Circuital de Ampère, a força magnetomotriz será igual a:

$$NI = \sum_{i=1}^5 H_i l_i + H \cdot x$$

Sendo  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do ar :

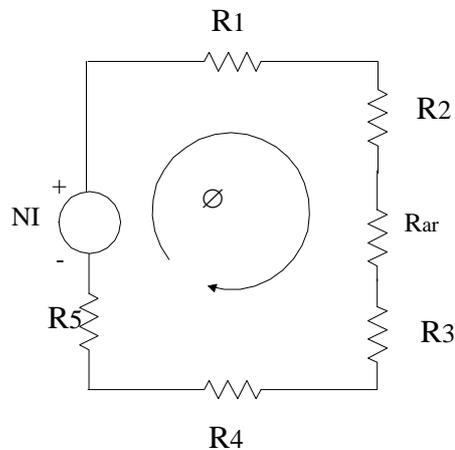
$$NI = \sum_{i=1}^5 \frac{B_i}{\mu_i} l_i + \frac{B}{\mu_0} x \quad (3.9)$$

$$NI = \sum_{i=1}^5 \phi_i \frac{l_i}{\mu_i S} + \phi \frac{x}{\mu_0 S}$$

Como o fluxo é constante no circuito magnético ( $\phi_i = \phi$ ), tem-se:

$$NI = \left[ \sum_{i=1}^5 R_i + R_{ar} \right] \phi \quad (3.10)$$

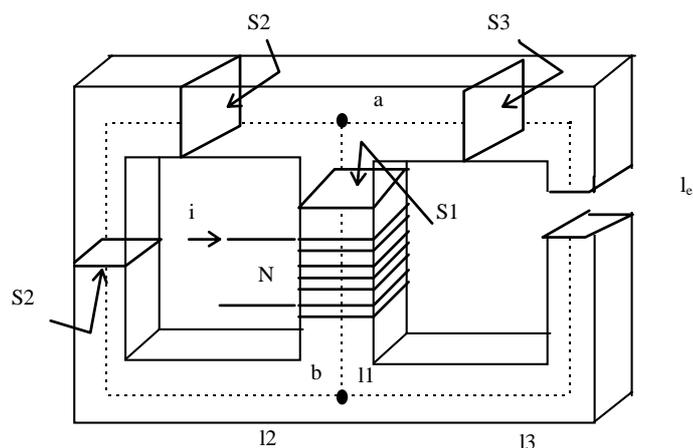
A expressão anterior sugere o circuito elétrico análogo (ver Tabela 1 de Analogia das Grandezas Elétrica e Magnética) da figura 3.4.



**Figura 3.4 - Circuito Elétrico Análogo ao Circuito Magnético da Figura 3.3.**

O uso de analogias para a solução de circuitos magnéticos permite a análise de circuitos magnéticos através de técnicas usuais de circuitos elétricos, conforme mostra o exemplo seguinte:

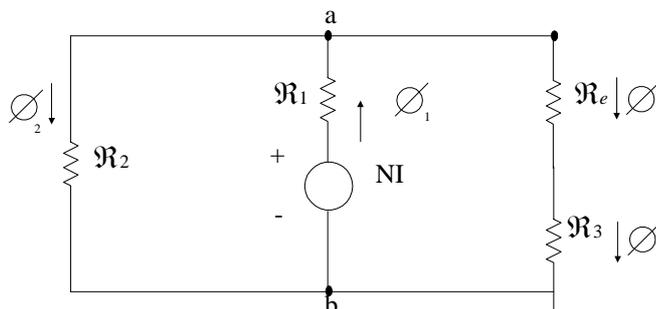
Exemplo 1: A figura 3.5 mostra um circuito magnético composto de braços paralelos de aço silício ( $\mu=5 \times 10^{-3}$  H/m), que possui um bobina de 500 espiras. As dimensões são  $l_e=1\text{mm}$ ,  $S_2=S_3=160\text{ mm}^2$ ,  $S_1=320\text{mm}^2$ ,  $l_1=40\text{mm}$ ,  $l_2=100\text{mm}$  e  $l_3=99\text{mm}$ . Calcule a corrente da bobina para que a indução magnética no entreferro seja igual a 1.0 T.



**Figura 3.5 - Circuito Magnético do Exemplo 1**

No entreferro  $\Phi = B \cdot S = 1 \times 160 \times 10^{-6} = 160 \mu\text{Wb}$

A figura 3.6 mostra o circuito elétrico equivalente:



**Figura 3.6 - Circuito Elétrico Equivalente**

$$\mathfrak{R}_{11} = \frac{l_1}{\mu S_1} = \frac{40 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} \times 320 \times 10^{-6}} = 25000 H^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{l_2}{\mu S_2} = \frac{100 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} \times 160 \times 10^{-6}} = 125000 H^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{l_3}{\mu S_3} = \frac{99 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} \times 160 \times 10^{-6}} = 123750 H^{-1}$$

A permeabilidade magnética no ar vale  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, logo:

$$\mathfrak{R}_e = \frac{l_e}{\mu_0 S} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 160 \times 10^{-6}} = 4973592 H^{-1}$$

A queda de força eletromotriz ( $\mathfrak{S}_{ab}$ ) entre os pontos a e b será igual a:

$$\mathfrak{S}_{ab} = (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_3) \phi = 815,6 Aesp$$

Logo o fluxo  $\phi_2$  pode ser calculado na forma:

$$\phi_2 = \frac{\mathfrak{S}_{ab}}{\mathfrak{R}_2} = 6,2 mWb (6,52 \times 10^{-3} Wb)$$

Assim o fluxo  $\phi_1$  na perna central será igual a:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 = 6,68 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

$$F = NI = R_1 \phi_1 + F_{ab} = 25000 \times 6,68 \times 10^{-3} + 815,6 = 982,7 \text{ Aesp}$$

A corrente na bobina será igual a:

$$I = \frac{F}{N} = \frac{982,7}{500} = 1,97 \text{ A}$$

### 3.4 Indutor e Indutância Própria

Um indutor é composto por uma bobina em cuja seção transversal tem-se um fluxo magnético  $\phi$ , quando a bobina é percorrida por uma corrente  $I$ . Se o indutor possuir  $N$  espiras, define-se indutância própria (unidade H - Henry) por:

$$L = \frac{N\phi}{I} \quad (3.11)$$

Observe que:

$$L = \frac{N^2 \phi}{NI} = \frac{N^2 \phi}{\mathfrak{S}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (3.12)$$

Portanto, a indutância de um indutor dependerá basicamente de:

- sua forma geométrica;
- o meio magnético em que a bobina está imersa;
- o número de espiras da bobina.

No exemplo 1, pode-se calcular a indutância da bobina, tanto pela definição (expressão 3.11), como pela expressão (3.12).

Pela definição tem-se:

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{500 \times 6,68 \times 10^{-3}}{1,97} = 1,70 \text{ H}$$

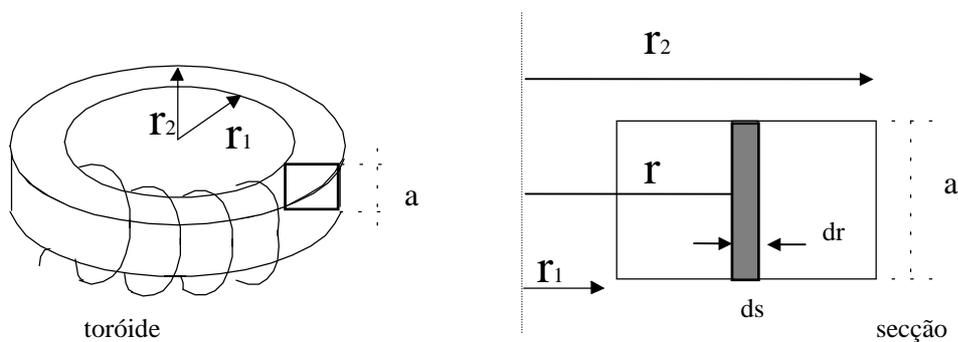
Pela segunda expressão, a relutância  $\mathfrak{R}$  será igual à relutância que é vista pela “fonte  $NI$ ”, ou seja:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_3) / \mathfrak{R}_2$$

$$\mathfrak{R} = 147008H^{-1}$$

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = 1.70H$$

Um outro exemplo para o cálculo de indutância é um toróide de seção reta quadrada como o da figura:



**Figura 3.7 - Toróide de Seção Quadrada**

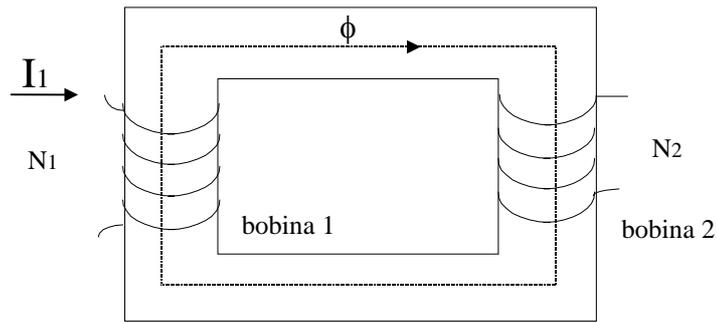
$$dR = \frac{x}{\mu_o ds} = \frac{2\pi r}{\mu_o a dr}$$

$$L = \frac{N^2}{R} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{N^2 \mu_o a dr}{2\pi r} = \frac{N^2 \mu_o a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

### 3.5 Mútua Indutância

Em um circuito magnético em que se tem duas ou mais bobinas é possível definir a mútua indutância de forma análoga à definição de Indutância Própria.

Observe a figura 3.8 a seguir, onde tem-se duas bobinas que possuem em comum o mesmo circuito magnético.



**Figura 3.8 - Definição de Mútua Indutância**

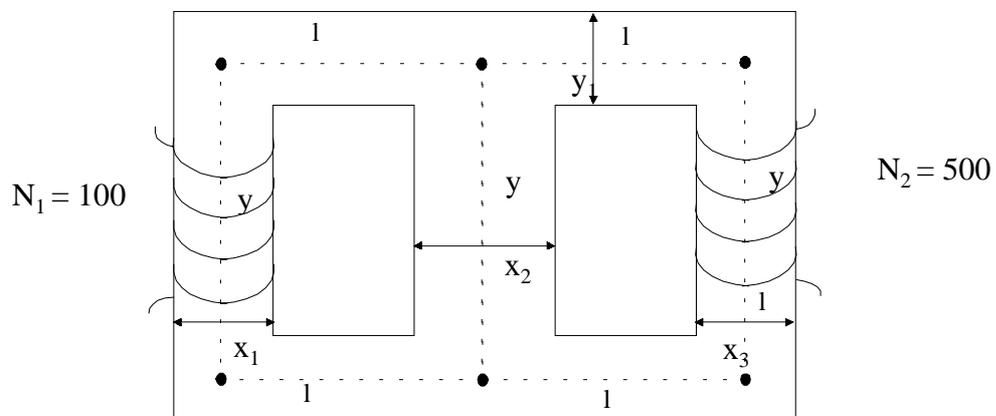
Admitindo que na bobina 1 circule uma corrente de valor  $I_1$ , que a bobina 2 tenha  $N_2$  espiras e que um fluxo  $\phi$  atravesse a bobina 2, pode-se definir mútua indutância (igualmente medida em Henry):

$$M = \frac{N_2 \phi}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (3.13)$$

$$M = \frac{N_1 N_2 \phi}{N_1 I_1} = \frac{N_1 N_2 \phi}{\mathfrak{F}} = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}} \quad (3.14)$$

A análise do exemplo seguinte esclarece o conceito de mútua indutância.

Exemplo 2: Um circuito magnético é feito de aço silício ( $\mu = 5 \times 10^{-3} H/m$ ), e possui as dimensões da figura 3.9. Determine a mútua indutância, sabendo que a profundidade do circuito magnético é igual a 2cm.

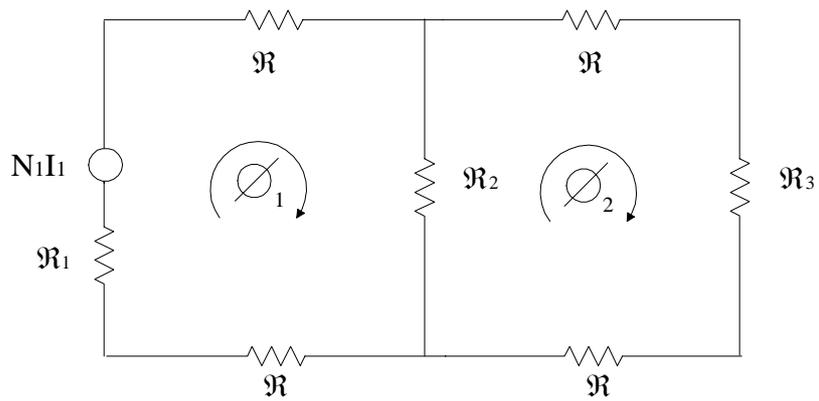


$$y=10\text{cm}; \quad \underline{1} = 5\text{cm}; \quad x_1=1\text{cm}; \quad x_2=4\text{cm}; \quad x_3=2\text{cm}; \quad y_1=1\text{cm}.$$

**Figura 3.9 - Circuito Magnético**

**Cálculo da mútua indutância**

Apenas para fins de cálculo de mútua indutância vamos admitir que a corrente na bobina 1 é igual a 1A, e na bobina 2 é nula. Assim, o circuito elétrico análogo resulta:



**Figura 3.10 - Circuito Elétrico Análogo da figura 3.9**

$$\mathfrak{R} = \frac{5 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{10 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-4}} = 10 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{10 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-4}} = 2.5 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{10 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-4}} \quad R = 5 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} NI_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + 2R & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 \times 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 10 + 2,5 + 10 & -2,5 \\ -2,5 & 2,5 + 5 + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 22,5 & 100 \\ -2,5 & 0 \end{vmatrix} \times 10^4}{\begin{vmatrix} 22,5 & -2,5 \\ -2,5 & 17,5 \end{vmatrix} \times 10^8} = 64,52 \mu Wb$$

$$M = \frac{N_2 \phi_2}{I_1}$$

$$M = 32,26 mH$$

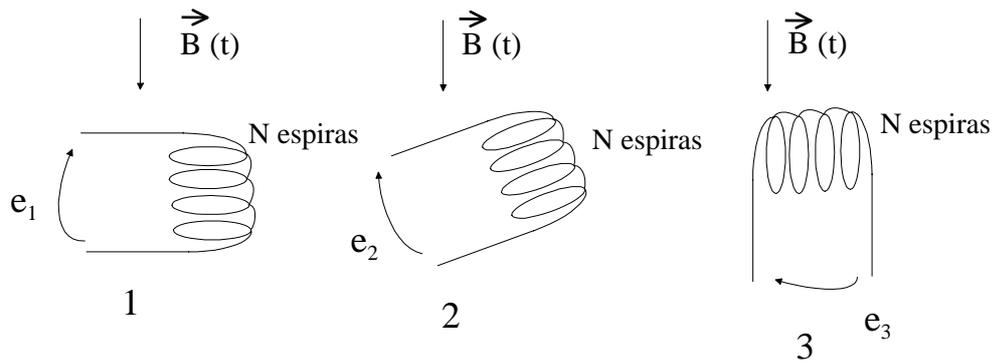
### 3.6 Tensão Induzida

Os modelos desenvolvidos até o momento permitem o cálculo de várias grandezas eletromagnéticas, mas não contemplam o fenômeno de indução de tensão, visto no item “Indução de Tensão em uma Bobina”.

Qualitativamente observou-se que em uma bobina imersa em um campo magnético variável no tempo há uma tensão induzida. Esta tensão depende basicamente do número de espiras da bobina e da variação do campo magnético na bobina.

O caso analisado no item 2.4, apresenta uma particularidade: a indução magnética  $\vec{B}$  é paralela ao eixo da bobina, ou seja, o fluxo produzido é máximo.

Observe a figura 3.11 na qual temos três situações distintas, onde  $\vec{B}(t)$  é uma distribuição de campo magnético variável com o tempo.



**Figura 3.10 - Influência da Posição da Bobina na Indução de Tensão**

Observa-se experimentalmente que, mantido o campo externo  $\vec{B}(t)$ , a tensão induzida  $e_1$ , é maior que  $e_2$  e esta por sua vez é superior a  $e_3$ . Na realidade a tensão  $e_3$  é nula. Ao mesmo tempo, nota-se que o fluxo associado à bobina do vetor  $\vec{B}(t)$  é máximo na situação 1, intermediário na situação 2 e nulo na situação 3.

Assim, pode-se concluir que a tensão induzida por um campo externo em uma bobina é proporcional à variação do fluxo deste campo.

Deste modo, a tensão induzida é:

- proporcional ao número de espiras da bobina;
- proporcional à variação do fluxo magnético no tempo;

A Lei de Faraday-Lenz, exprime estas duas observações, pode ser expressa na forma:

$$e = N \frac{d\phi}{dt} \quad (3.15)$$

Observe que:

- se o fluxo é produzido pela circulação de corrente na própria bobina, então  $N\phi(+) = Li(t)$ : A Lei de Faraday-Lenz pode então ser escrita na forma:

$$e(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.16)$$

expressão usual em circuitos elétricos para a descrição de um indutor.

- se o fluxo é produzido pela circulação de corrente em uma outra bobina (aqui denominada bobina 1), então  $N_2 \phi_{(+)} = M_{12} i_1(t)$ . A lei de Faraday-Lenz passa a ser escrita na forma:

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = M_{12} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (3.17)$$

A expressão 3.17 é a forma usual da descrição do acoplamento magnético entre bobinas do ponto de vista de circuitos elétricos.

### 3.6.1 Tensão induzida por um fluxo senoidal no tempo

Admitindo que a variação do fluxo no tempo é senoidal, tem-se:

$$\phi(t) = \phi_{\max} \sin \omega t \quad (3.18)$$

Logo:

$$e(t) = N \frac{d\phi}{dt} = N\omega\phi_{\max} \cos \omega t$$

E o valor eficaz da tensão será igual a:

$$E_{ef} = \frac{N\omega\phi_{\max}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi f N \phi_{\max} \quad (3.19)$$

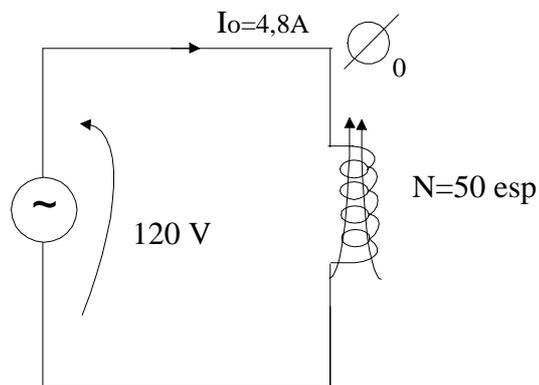
$$E_{ef} = 4,44 f N \phi_{\max}$$

A expressão 3.19 mostra que o valor eficaz da tensão induzida por um fluxo senoidal no tempo é proporcional à frequência, ao número de espiras e ao fluxo máximo.

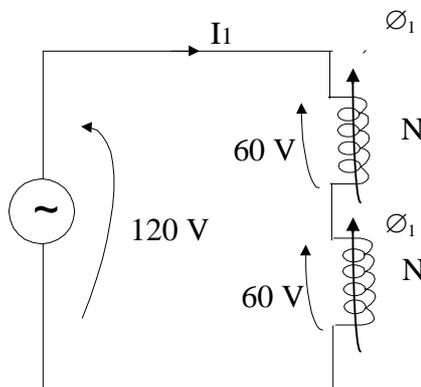
Exemplo 3: Um reator possui um núcleo de aço silício enrolado com 4 bobinas de 50 espiras cada uma. Quando uma única bobina é alimentada por uma fonte de tensão alternada de 120V eficazes, 60Hz, a corrente absorvida é igual a 4,8A. Determine a corrente absorvida quando a mesma fonte alimenta:

- a) duas bobinas em série;
- b) duas bobinas em paralelo;

Na situação original tem-se a seguinte situação:



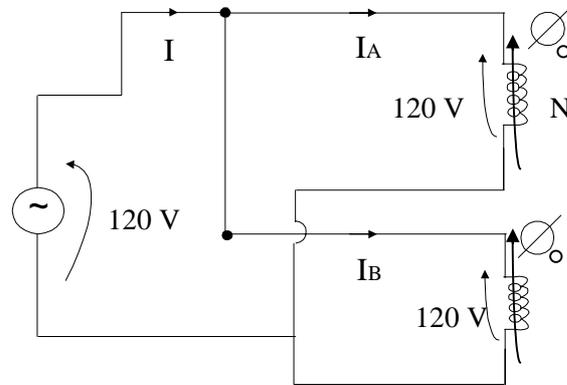
- a) Com duas bobinas em série e  $V_0=120V$ , em cada bobina deve-se ter uma tensão aplicada igual a 60V. Observando a expressão 3.19 ( $E_{ef}=4,44 f N \phi_{max}$ ), como a frequência e o número de espiras da bobina se mantêm, então o novo fluxo deve ser a metade do valor inicial.



Admitindo que o circuito magnético seja linear, então:  $NI_o = R\phi_o$  e  $2NI_1=R\phi_1$ ,

logo:  $\frac{I_o}{2I_1} = \frac{\phi_o}{\phi_1} = 2$       portanto  $I_1 = \frac{I_o}{4} = 1,2A$

b) Com as bobinas em paralelo a tensão sobre N espiras será igual a 120V. Desta forma o fluxo máximo no circuito magnético será igual a  $\phi_{\max}$ . A força magnetomotriz ( $\mathfrak{F}$ ) que produz o fluxo  $\phi_{\max}$  é igual a  $NI_0$ :



$$\text{logo: } NI_A + NI_B = NI_0$$

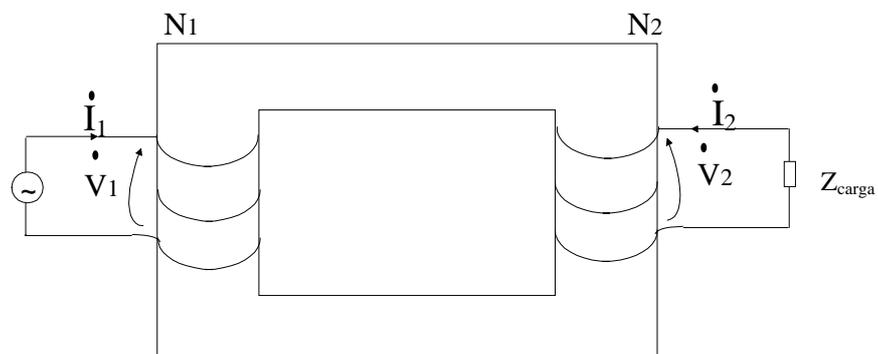
$$\text{mas } I_A = I_B \text{ pois as bobinas são idênticas logo } NI = NI_0$$

$$\text{e } NI = R\phi_0 \quad \text{portanto } I = I_0 = 4.8A$$

### 3.6.2 O transformador - princípios de funcionamento

Conhecidos os princípios de indução de tensão elétrica, torna-se possível entender o funcionamento de um dos mais populares dispositivos elétricos: o transformador.

Um transformador de dois enrolamentos pode ser visto na figura 3.12 seguinte:



### Figura 3.12 - Transformador

Aplicando-se uma tensão senoidal no enrolamento, de  $N_1$  espiras (aqui denominado enrolamento primário) e admitindo que o material ferromagnético tem permeabilidade infinita, pode-se afirmar que:

$$E_{1_{ef}} = 4,44 f N_1 \phi_{\max}$$

Nesta condição, a bobina secundária (conectada à carga) também está submetida a um campo magnético, que varia senoidalmente com o tempo e cujo fluxo máximo é  $\phi_{\max}$ . Assim:

$$E_{2_{ef}} = 4,44 f N_2 \phi_{\max}$$

A relação entre tensões de enrolamento secundário e primário será:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{N_2}{N_1} = a$$

onde “a” é denominada: relação de transformação.

Admitindo que não há perdas no ferro, nem perdas Joule nos enrolamentos, então a potência de entrada no transformador é igual à de saída, ou seja:

$E_1 I_1 = E_2 I_2$ , ou seja,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{E_2}{E_1} = a$$

Pode-se notar que o transformador é um dispositivo ideal para elevar tensões ( $a > 1$ ), ou para medição de correntes elevadas ( $a < 1$ ), ou mesmo para isolar circuitos ( $a = 1$ ) em corrente alternada.