Experiência 3
CIRCUITO RLC
RESSONÂNCIA E DIAGRAMA DE FASORES

I – INTRODUÇÃO

É extremamente recomendável que antes de iniciar este experimento, se faça uma revisão do Capítulo 26, p. 182 à 197 do Livro Física, Vol. 2, Alaor Chaves.

Em um circuito de corrente alternada (AC), os elétrons de um condutor metálico fluem num sentido somente por um curto intervalo de tempo, após o qual invertem o sentido do fluxo, voltando depois ao anterior, e assim sucessivamente. Por exemplo, se uma tensão senoidal é de *60 Hz* existem 120 inversões por segundo.

A - CIRCUITO RESISTIVO

Se uma resistência R é percorrida por uma corrente (figura 1(a)) dada pela equação (1), haverá uma queda de tensão v_R dada pela expressão (2), que evidentemente está em fase com a corrente i (ver figura 1(b)):

$$i = i_0 sen(2\pi f \cdot t) \qquad (1)$$

$$v_R = v_0 sen(2\pi f \cdot t) = R \cdot i_0 sen(2\pi f \cdot t) \qquad (2)$$

onde i_0 e v_0 são as amplitudes máximas da corrente e da tensão e f é a frequência em Hertz (*Hz*).

A relação de fase entre a corrente e a tensão no resistor em um tempo t' qualquer, pode ser visualizada no *diagrama de fasores* (inserido na figura 1(b)). Este nada mais é do que um diagrama XY, em que a tensão v_R e a corrente i_R no resistor são associados a vetores complexos $\mathbf{V_R}$ e $\mathbf{I_R}$, girando com uma freqüência $\omega = 2\pi f$.

Como explicado na experiência 1, o *valor efetivo* de uma corrente (ou tensão) alternada é equivalente ao valor que dissipa numa resistência a mesma potência de uma corrente *contínua* de mesmo valor. O *valor efetivo* é, naturalmente, um valor constante. A energia dissipada W da

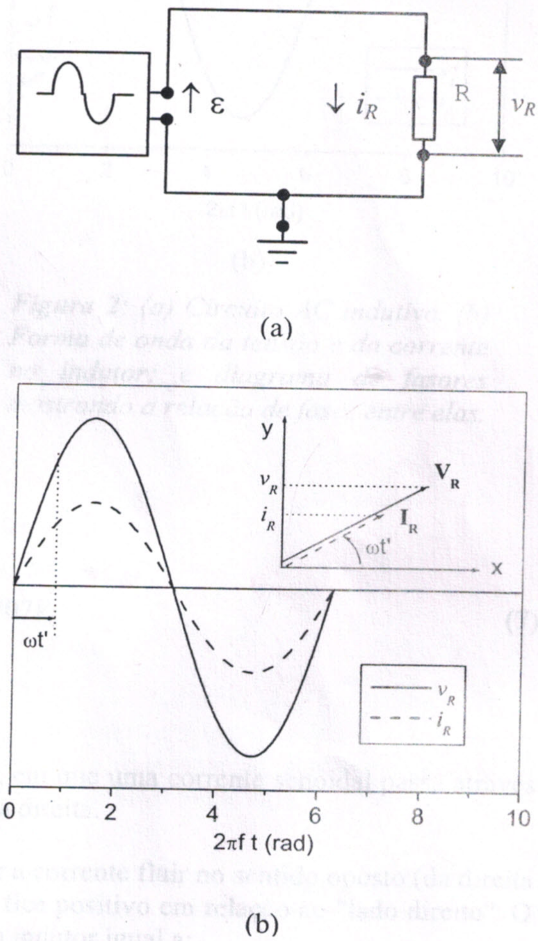


***Figura 1**: (a) Circuito AC resistivo. (b) Forma de onda da tensão no resistor e diagrama de fasores mostrando a relação de fases.*

corrente alternada em um período T que passa pelo resistor R acima será dada por:

$$W = R\int_0^T i_0^2 sen^2(2\pi f \cdot t)dt \,. \qquad (3)$$

Seja i_{ef} , o valor efetivo da corrente, então temos:

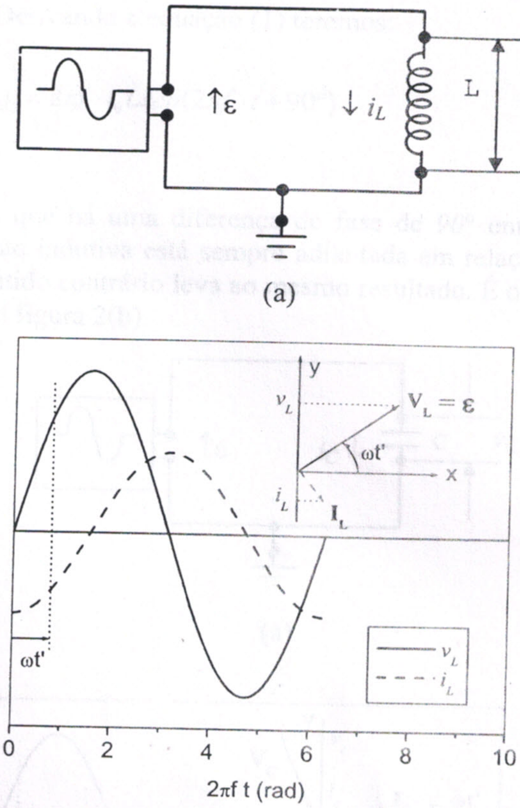
$$W = Ri_{ef}^2 T \,. \qquad (4)$$

Comparando (3) e (4), a corrente eficaz é dada por:

$$i_{ef}^2 = \left(\frac{i_0^2}{T}\right)\int_0^T sen^2(2\pi f \cdot t)dt \,. \qquad (5)$$

Fazendo os cálculos, temos:

$$i_{ef} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i_0 = 0{,}707 i_0 \,. \qquad (6)$$



(a)

(b)

***Figura 2:** (a) Circuito AC indutivo. (b) Forma de onda da tensão e da corrente no indutor; e diagrama de fasores mostrando a relação de fases entre elas.*

Analogamente, temos que a tensão eficaz é dada por:

$$V_{ef} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)V_0 = 0{,}707 V_0 \,. \qquad (7)$$

B – CIRCUITO INDUTIVO

Na figura 2(a) mostramos um circuito indutivo, em que uma corrente senoidal passa através de um indutor L no sentido crescente da esquerda para a direita.

No indutor é criada uma *f.e.m.* que tende a fazer a corrente fluir no sentido oposto (da direita para a esquerda). Assim, o "lado esquerdo" do indutor fica positivo em relação ao "lado direito". O efeito resultante será uma queda de potencial através do indutor igual a:

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \,, \qquad (8)$$

onde v_L é a queda de potencial através do indutor. Derivando a equação (1) teremos:

$$v_L = L\frac{di_i}{dt} = L[2\pi f \cdot i_0 \cos(2\pi f \cdot t)] = 2\pi f \cdot i_0 L sen(2\pi f \cdot t + 90°)\,. \qquad (9)$$

Comparando as equações (1) e (9), vemos que há uma diferença de fase de *90°* entre a tensão e a corrente no indutor, sendo assim, a tensão indutiva está sempre adiantada em relação a corrente. O raciocínio para a corrente fluindo no sentido contrário leva ao mesmo resultado. É o que mostra as formas de onda e o diagrama de fasores da figura 2(b).

C – CIRCUITO CAPACITIVO

Consideremos um circuito DC capacitivo. No instante em que o circuito é fechado, haverá circulação de uma corrente contínua até que as placas do capacitor atinjam o potencial fornecido pela fonte. A partir deste instante encerra-se a passagem da corrente. Em um circuito de corrente alternada (AC) como o mostrado na figura 3(a), as placas carregam-se alternadamente com cargas contrárias. Existe, portanto, uma continua ida e volta de cargas no circuito, e consequentemente uma corrente alternada.

A corrente no capacitor é dada pela expressão:

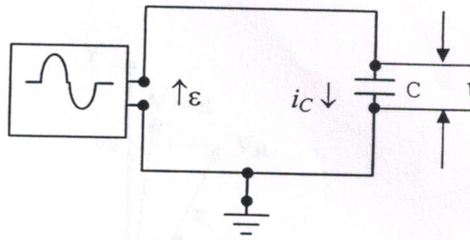
$$i_C = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dv_C}{dt}\,. \qquad (10)$$

Se a tensão aplicada for:

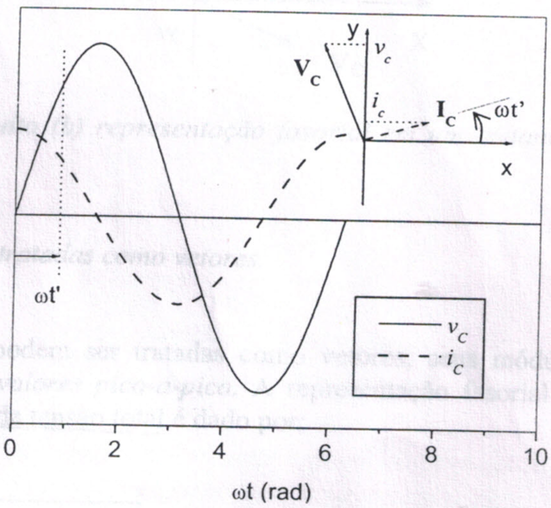
$$v_C = v_0 sen(2\pi f \cdot t)\,, \qquad (11)$$

a corrente será dada por:

$$\begin{aligned} i_C &= 2\pi f \cdot C \cdot v_0 \cos(2\pi f \cdot t) = \\ &= 2\pi f \cdot C \cdot v_0 sen(2\pi f \cdot t + 90°) \end{aligned}\,. \qquad (12)$$



(a)



(b)

***Figura** 3: (a) Circuito AC capacitivo. (b) Forma de onda da tensão e da corrente no capacitor; e diagrama de fasores mostrando a relação de fases entre elas.*

Vemos portanto, que a tensão se atrasa em relação à corrente de um ângulo de fase de *90°*. Esta situação é representada nas formas de onda mostradas figura 3(b) e na representação fasorial inserida na figura.

D - CIRCUITO RLC

No circuito RLC em série mostrado na figura 4(a), a tensão aplicada ε é igual à soma das tensões em cada elemento $\varepsilon = V = V_R + V_L + V_C$ nos dando:

$$V = V_R sen(2\pi f \cdot t) + (V_L - V_C)\cos(2\pi f \cdot t) \tag{13}$$

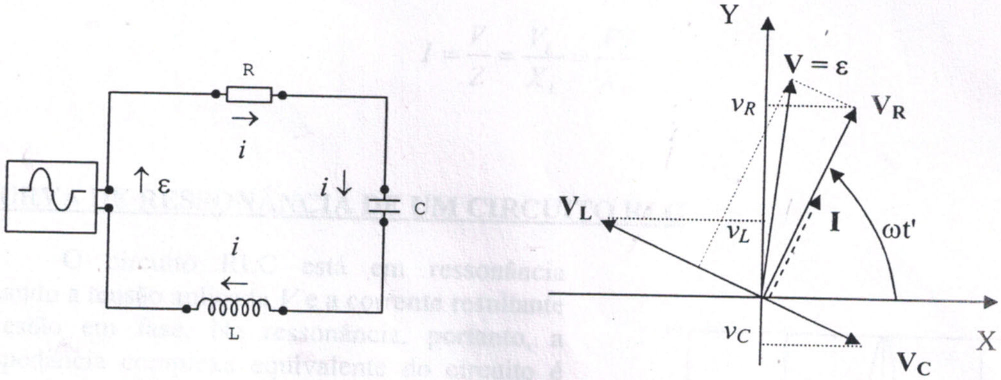


***Figura 4**: Circuito RLC: (a) diagrama do circuito (b) representação fasorial em um instante t' qualquer.*

<u>Exercício 1:</u> *Mostre que estas tensões podem ser tratadas como vetores.*

Uma vez que estas tensões complexas podem ser tratadas como vetores, seus módulos podem ser tanto os *valores eficazes* quanto os *valores pico-a-pico*. A representação fasorial do circuito é vista na figura 4(b). O valor do módulo da tensão total é dado por:

$$V = \sqrt{V_R^{\,2} + (V_L - V_C)^2}\ . \tag{14}$$

<u>Exercício 2:</u> *Verifique se a tensão nos extremos de um elemento pode ser maior que a tensão aplicada*

No circuito RLC, a corrente é dada pela expressão:

$$I = \frac{V}{Z}, \tag{15}$$

onde Z é a *impedância do circuito*, que é uma grandeza complexa análoga à resistência. De fato, sempre se tem $I = V/R$ num circuito puramente resistivo, entretanto, se houver indutâncias e capacitâncias em série com R, sempre se terá Z.

Exercício 3: *Demonstre que:*

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{16}$$

onde $X_L = \omega L$ e $X_C = (\omega C)^{-1}$ são as reatâncias indutiva e capacitiva do circuito (medidas em Ohms), respectivamente.

Exercício 4: *Verifique que nos extremos do indutor ou capacitor tem-se sempre que:*

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_L}{X_L} = \frac{V_C}{X_C} \tag{17}$$

CURVA DE RESSONÂNCIA DE UM CIRCUITO RLC

O circuito RLC está em ressonância quando a tensão aplicada *V* e a corrente resultante *I* estão em fase. Na ressonância, portanto, a impedância complexa equivalente do circuito é exatamente o valor da resistência *R*, ou seja, quando $X_C = X_L$. O valor da impedância é mínimo na ressonância. Como $\omega = 2\pi f$, a freqüência f_0, denominada *freqüência de ressonância* do circuito, é dada por:

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{18}$$

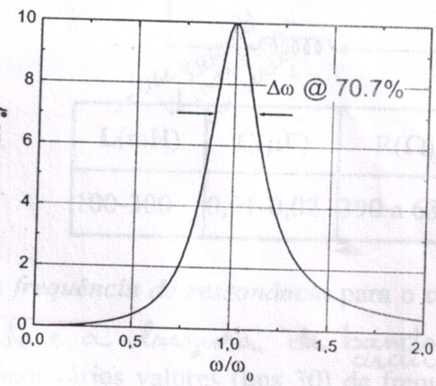


Figura 6: *Potência efetiva em função da variação angular ω para um circuito RLC.*

Observe-se uma inteira analogia entre a ressonância de circuitos RLC forçados e osciladores mecânicos forçados. A energia armazenada num circuito RLC é constante. Uma vez que, quando a tensão no capacitor é máxima, a corrente no indutor é nula, e vice-versa. A figura 6 mostra a variação da potência efetiva com a freqüência angular ω do gerador de audio para um três circuitos RLC. A curva está normalizada em termos da frequência angular de ressonância (ω_o).

Exercício 5: *Mostre que a potência média $P_{ef}(\omega)$ passa por um máximo na freqüência de ressonância, e a corrente é máxima também.*

FATOR DE QUALIDADE

$= \omega_0/\Delta\omega$

A razão $Q = 2\pi f_0 L/R$ é denominada *fator de qualidade* do circuito. O fator de qualidade é uma figura de mérito do circuito. Valores grandes do fator de qualidade implicam em ressonâncias intensas e estreitas. Os circuitos de sintonia de receptores de rádio, por exemplo, são do tipo RLC.

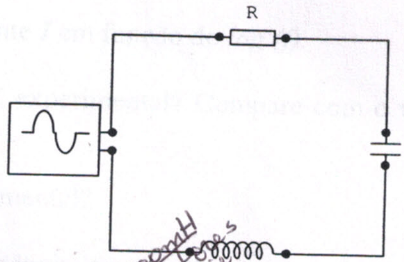
Em geral, a sintonia do receptor se faz variando o valor da capacitância C de um capacitor variável até que a frequência de ressonância ω_0 do circuito se iguale à frequência ω da onda portadora enviada pela emissora. Os melhores receptores de rádio têm fator de qualidade da ordem de 10^8. O fator de qualidade também pode ser calculado através da relação:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}, \qquad (19)$$

onde f_o é a frequência de ressonância e Δf é a largura do pico de ressonância para uma potência efetiva correspondente a:

$$P_{ef}(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}) = \frac{P_{ef}(\omega_0)}{\sqrt{2}} = 70{,}7\% \cdot P_{ef}^{Max} \qquad (20)$$

II – PARTE EXPERIMENTAL



L(mH)	C(μF)	R(Ω)
100-300	0,01-0,02	390 a 680

1) Monte o circuito RLC da figura ao lado, escolhendo os componentes cujos valores estejam dentro das faixas especificadas na tabela.

2) Meça a resistência do indutor e do resistor com um multímetro. A resistência total do circuito é a soma destes dois valores.

3) Meça a capacitância e a indutância do circuito com o medidor LCR.*

4) Ajuste o gerador para uma tensão de ~~6~~ 4 V_{pp} lidos no osciloscópio.

5) Com os valores de L e C, obtenha o valor teórico da *frequência de ressonância* para o circuito RLC a partir da equação (18).

6) Determine o fator de qualidade do circuito e a largura de banda do circuito ($\Delta\omega$).

~~6~~ 7) Meça os valores de v_R, v_L e v_C com o osciloscópio para vários valores (uns 30) de frequência, começando de ~~400~~ 1k *Hz* até *10 KHz*. Utilize o valor calculado em 5) como referência para avaliar o passo em frequência a ser utilizado nas medidas de modo a obter uma curva de ressonância experimental que delimite bem a posição de ressonância. Perto da ressonância, faça passos entre ~~100~~ 50 a ~~100~~ 50 *Hz*, aproximadamente. Este valor também deverá ser utilizado posteriormente para comparação com o valor experimental, proveniente das curvas experimentais feitas a seguir. Procure ler com precisão os valores destas tensões. Certifique-se que a tensão do gerador seja, para todas as medidas, *6 Vpp*. Após anotados os valores num papel, digite a tabela abaixo no *Origin* ®.

Variar inicialmente de 200 Hz

TABELA DE DADOS

	f (Hz)	V_R (V)	V_L (V)	V_C (V)
1	400	...	...	...
2	...	...	...	...
...	...	...	...	...
30	10000	...	...	...

* Use o multímetro p/ encontrar R e C. Para determinar L veja o ítem 16, deixando o indutor longe do circuito.

7) Calcule a tensão total e a corrente no circuito para cada freqüência.

8) Calcule, para cada freqüência, a reatância indutiva, a reatância capacitiva e a impedância total do circuito, usando os valores medidos das tensões e a corrente calculada no item anterior.

9) Encontre então o valor de L para cada frequência. Ache o valor médio e a incerteza de L e compare com o valor impresso no indutor e com o valor medido pelo medidor LCR. Qual é o mais preciso? Porque?

10) É possível aqui fazer os cálculos com valores *pp* apesar das fórmulas serem apropriadas para os valores eficazes. Porque?

11) Calcule o valor da impedância Z pela equação (16), para cada valor da frequência, e experimentalmente através de $Z = V/I = \cancel{(V_R + V_L + V_C)}/I$. Faça um gráfico contendo os dados teóricos e experimentais de Z em função da frequência. No mesmo gráfico, plote a corrente I em função da frequência e compare com o comportamento de Z.

12) De posse dos dados experimentais, trace a curva da corrente I em função do *log (f)*.

13) Qual é a frequência de ressonância de seu circuito RLC experimental? Compare com o valor calculado.

14) Qual é o fator de qualidade Q do circuito, teórico e experimental?

15) Discuta os efeitos sobre a ressonância ao se alterar: a resistência; a capacitância; e a indutância.

16) Descreva um procedimento experimental p/ se determinar a indutância de um dado indutor.

Outras Referências Bibliográficas

- *Física*, Sears - Vol. II, Cap. 37

- *Física*, D. Halliday and R. Resnick - Vol. 4, Cap. 39